Université Paul Sabatier de Toulouse, année universitaire 2005-2006

CIMP, PHYSIQUE

ÉPREUVE 2 de Contrôle continu

Vendredi 2 décembre 2005, durée : 1 h

Aucun document n'est autorisé

On rappelle que les correcteurs sont sensibles à la lisibilité des copies, à l'orthographe ainsi qu'au style, lequel, en aucun cas, ne doit être télégraphique.

A. Questions de cours (5 points)

Théorème de l'énergie pour un point matériel

i) Énoncer, sans démonstration, le théorème de l'énergie cinétique relatif à un point matériel.

ii) Établir le théorème de l'énergie mécanique correspondant.

iii) Dans quelle condition l'énergie mécanique d'un point matériel se conserve-t-elle ? Justifier. Exemple concret de votre choix (pendule simple, pendule élastique, chute des corps, etc.).

B. Problème (15 points)

Conformément à l'usage typographique international, les vecteurs sont représentés en gras

Filtre mécanique résonnant

Les différentes questions posées présentent entre elles une très large autonomie. Par exemple, le diagramme de Bode de la dernière question peut être tracé sans avoir traité les questions antérieures.

Un système mécanique est constitué d'une masselotte A (masse inerte $m = 0,5$ kg) accrochée à l'extrémité d'un ressort, de raideur $K = 500$ N.m^{-1} et de longueur à vide l_0. La masselotte évolue sans frottement le long d'un axe matériel horizontal Ox d'un référentiel terrestre, c'est-à-dire que la réaction $\mathbf{R}$ qu'exerce cet axe sur A est normale à Ox (Fig. 1). L'autre extrémité du ressort est astreinte à un déplacement sinusoïdal : $d(t) = d_m \cos(\omega t + \phi_e)$.

Fig. 1

Fig. 2

1) a) Exprimer la force exercée par le ressort sur A en fonction de l'abscisse x de ce point, du déplacement $d(t)$ et de la longueur à vide l_0 du ressort. Appliquer la loi fondamentale de la dynamique à A, sachant que la masselotte est soumise aussi à une force de frottement visqueux de Stokes $-\alpha\,\dot{x}\,\mathbf{e}_x$, dont le coefficient vaut $\alpha = 0,4$ SI.

T.S.V.P.

b) Montrer que le mouvement de A satisfait à une équation différentielle du deuxième ordre qui peut se mettre sous la forme canonique suivante :

$$\ddot{X} + \frac{\dot{X}}{\tau_e} + \omega_0^2 X = a_m \cos(\omega t + \phi_e)$$

dans laquelle X est une grandeur que l'on reliera à x.

c) Exprimer ω_0, τ_e et a_m en fonction des données m, K, α et d_m. Rappeler le nom de ces grandeurs physiques en précisant leurs unités SI. Calculer les valeurs de ω_0 et de τ_e.

2. On se propose d'analyser le système mécanique précédent selon une théorie du transfert analogue à celle connue en électricité. Pour cela, on analyse le circuit de la figure 2.

a) Établir l'équation différentielle à laquelle satisfait la charge q de l'armature supérieure du condensateur du circuit RLC, dans lequel un GBF (Générateur Basse Fréquence) impose à ses bornes la tension sinusoïdale $e(t) = e_m \cos(\omega t + \phi_e)$ (Fig. 2).

b) Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{q} + \frac{\dot{q}}{\tau_e} + \omega_0^2 q = b_m \cos(\omega t + \phi_e)$$

dans laquelle ω_0, τ_e et b_m sont des grandeurs physiques que l'on reliera aux données L, C, R et e_m.

c) Pour résoudre le problème en régime sinusoïdal établi, après le régime transitoire, on introduit le concept d'amplitude complexe $\underline{e}_m$, associée à $e(t)$. Donner la définition de l'amplitude complexe, associée à une grandeur sinusoïdale, et rappeler son intérêt.

d) Quelle est l'impédance électrique complexe Z du circuit RLC ?

e) Trouver la fonction de transfert du circuit, $\underline{u}_s/\underline{u}_e$, entre la tension l'entrée $u_e = e(t)$ et la la tension de sortie $u_s = Ri$ aux bornes du résistor. Montrer qu'elle peut s'écrire :

$$\mathcal{H}(\nu) = \frac{1}{1 + jQ(\nu - 1/\nu)}$$

où $\nu = f/f_0$ est la fréquence réduite et Q une grandeur physique que l'on exprimera en fonction de ω_0 et τ_e.

3) a) En s'appuyant sur la ressemblance des deux équations différentielles précédentes, établir la correspondance entre le groupe des grandeurs électriques $\{q, R, L, C, e_m\}$ et celui des grandeurs mécaniques $\{X, \alpha, m, K, d_m\}$.

b) En déduire par analogie l'impédance Z_m de l'oscillateur mécanique considéré (Fig. 1), ainsi que la fonction de transfert $\mathcal{H}_m(\nu)$ du système mécanique. Calculer la valeur du facteur Q correspondant.

c) On s'intéresse à la variation du gain $G_u(\text{dB}) = 20 \lg |\mathcal{H}|$ en fonction de $\mathcal{N} = \lg \nu$. Pourquoi introduit-on des échelles logarithmiques en abscisses et en ordonnées ? En calculant les valeurs du gain pour $\mathcal{N} = 0$, $\mathcal{N} = \infty$ et $\mathcal{N} = -\infty$, trouver la nature du filtre mécanique ainsi constitué. Tracer avec soin le diagramme de Bode $G_u(\mathcal{N})$, en déterminant les équations des asymptotes.